Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 49

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

16 de enero de 2021

1. Calcular $\overset{\frown}{v}^{\parallel}$

Dados los puntos:

$$A = (x, y), \qquad D = (x, y + \delta y), \qquad C = (x + \delta x, y + \delta y)$$

Queremos calcular el vector $v^{\parallel}$ transportado por el camino ADC.
Podríamos empezar, tal como Javier hace en el video, con la expresión

$$v^{\parallel a}(x + \delta x) = v^a(x) - \Pi^a_{\mu c}(x) v^c(x) \delta x^\mu \tag{1}$$

Pero esta expresión está ignorando términos de orden δx^2, por lo que, por consistencia voy a usar una expresión que sea exacta a segundo orden. Para deducir la ecuación (1) Javier ha usado la aproximación

$$\partial_\mu v^{\parallel a}(x) = \frac{v^{\parallel a}(x + \delta x) - v^{\parallel a}(x)}{\delta x^\mu}$$

Pero yo voy a usar la expansión de Taylor de orden 2

$$v^{\parallel a}(x + \delta x) = v^{\parallel a}(x) + \partial_\mu v^{\parallel a}(x) \delta x^\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu v^{\parallel a}(x) \delta x^\mu \delta x^\nu \tag{2}$$

Recordemos pero que $v^{\parallel}$ cumple

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}^{\parallel}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \left(\partial_\mu v^{\parallel a} + \Pi^a_{\mu c} v^{\parallel c} \right) e_a = 0 \Longrightarrow \partial_\mu v^{\parallel a}(x) = -\Pi^a_{\mu b} v^{\parallel b} \tag{3}$$

De donde podemos sacar la relación

$$\partial_\nu \partial_\mu v^{\parallel a}(x) = -\partial_\nu \left(\Pi^a_{\mu b} v^{\parallel b} \right) = -\left(\partial_\nu \Pi^a_{\mu b} v^b - \Pi^a_{\mu b} \Pi^b_{\nu c} v^c \right) = 2\Pi^a_{\mu\nu b} v^b$$

Donde he definido

$$2\Pi^a_{\mu\nu b} = \Pi^a_{\mu c} \Pi^c_{\nu b} - \partial_\nu \Pi^a_{\mu b}$$

Usando esto junto con (3) en la expansión (2) obtenemos

$$v^{\parallel a}(x + \delta x) = \left(\delta^a_b - \Pi^a_{\mu b} \delta x^\mu + \Pi^a_{\mu\nu b} \delta x^\mu \delta x^\nu \right) v^b$$

Ahora podemos transportar paralelamente el vector v desde A hasta D:

$$v^{\parallel a}(D) = \left(\delta^a_b - \Pi^a_{yb}(A) \delta y + \Pi^a_{yyb}(A) \delta y^2 \right) v^b(A)$$

Y transportando paralelamente hasta el punto C, obtenemos finalmente el resultado

$$\begin{aligned}
\overset{\frown}{v}^{\parallel a}(C) &= \left(\delta^a_b - \Pi^a_{xb}(D) \delta x + \Pi^a_{xxb}(D) \delta x^2 \right) v^b(D) \\
&= \left(\delta^a_b - \Pi^a_{xb}(D) \delta x + \Pi^a_{xxb}(D) \delta x^2 \right) \left(\delta^b_c - \Pi^b_{yc}(A) \delta y + \Pi^b_{yyc}(A) \delta y^2 \right) v^c(A) \\
&= \left(\delta^a_c - \Pi^a_{yc}(A) \delta y - \Pi^a_{xc}(D) \delta x + \Pi^a_{xb}(D) \Pi^b_{yc}(A) \delta x \delta y + \Pi^a_{xxc}(D) \delta x^2 + \Pi^a_{yyc}(A) \delta y^2 \right) v^c(A)
\end{aligned}$$

Esto es un poco distinto a lo que tiene Javier, pues incluye dos términos extra, proporcionales a δx^2 y δy^2. Son estos dos términos importantes?
Para responder a esta pregunta empecemos rehaciendo el cálculo de $\overset{\curvearrowleft}{v}{}^{\parallel a}(C)$. En este caso vamos a ir de A a C pasando por el punto $B = (x + \delta x, y)$.

$$v^{\parallel a}(B) = \left(\delta^a_b - \Pi^a_{xb}(A)\delta x + \Pi^a_{xxb}(A)\delta x^2\right) v^b(A)$$

$$\begin{aligned}
\overset{\curvearrowleft}{v}{}^{\parallel a}(C) &= \left(\delta^a_b - \Pi^a_{yb}(B)\delta y + \Pi^a_{yyb}(B)\delta y^2\right) v^b(B) \\
&= \left(\delta^a_b - \Pi^a_{yb}(B)\delta y + \Pi^a_{yyb}(B)\delta y^2\right) \left(\delta^b_c - \Pi^b_{xc}(A)\delta x + \Pi^b_{xxc}(A)\delta x^2\right) v^c(A) \\
&= \left(\delta^a_c - \Pi^a_{xc}(A)\delta x - \Pi^a_{yc}(B)\delta y + \Pi^a_{yb}(B)\Pi^b_{xc}(A)\delta x\delta y + \Pi^a_{yyc}(B)\delta y^2 + \Pi^a_{xxc}(A)\delta x^2\right) v^c(A)
\end{aligned}$$

De modo que la diferencia

$$\begin{aligned}
\overset{\curvearrowleft}{v}{}^{\parallel}(C) - \overset{\curvearrowright}{v}{}^{\parallel}(C) = \big(&[\Pi_x(D) - \Pi_x(A)]\delta x - [\Pi_y(B) - \Pi_y(A)]\delta y + [\Pi_y(B)\Pi_x(A) - \Pi_x(D)\Pi_y(A)]\delta x\delta y \\
&+ [\Pi_{yy}(B) - \Pi_{yy}(A)]\delta y^2 - [\Pi_{xx}(D) - \Pi_{xx}(A)]\delta x^2\big) v^c(A)
\end{aligned}$$

Y dividiendo entre $\delta x\delta y$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\overset{\curvearrowleft}{v}{}^{\parallel}(C) - \overset{\curvearrowright}{v}{}^{\parallel}(C)}{\delta x\delta y} = \Big(&\partial_y\Pi_x(A) - \partial_x\Pi_y(A) + \Pi_y(B)\Pi_x(A) - \Pi_x(D)\Pi_y(A) \\
&+ \partial_x\Pi_{yy}(A)\delta y - \partial_y\Pi_{xx}(A)\delta x\Big) v^c(A)
\end{aligned}$$

Finalmente podemos ver que, si hacemos el limite $\delta x \to 0$ y $\delta y \to 0$ obtenemos el mismo resultado

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\overset{\curvearrowleft}{v}{}^{\parallel}(C) - \overset{\curvearrowright}{v}{}^{\parallel}(C)}{\delta x\delta y} = \Big(\partial_y\Pi_x - \partial_x\Pi_y + \Pi_y\Pi_x - \Pi_x\Pi_y\Big) v$$

Podemos ver que el resultado final es el mismo.